

第四回講義 (2011/May/13)

§3 コリングウッド・テーゼの「推論」の観点からの証明

- 1、古典的プラグマティズムによるテーゼ a の証明
- 2、数学的ないし論理的な言明についてのテーゼ a の証明

A 証明論的意味論の紹介

- (A) 論理法則の証明論的正当化 (Dummett, Prawitz)
- (B) 証明論的意味論の説明

<前回の復習と補足>

1、導入規則の自己正当化について。

≦導入規則が、論理定項の意味を fix し、論理定項の意味が、導入規則を正当化する。つまり、導入規則は自己正当化的である。>

これはどういう意味だろうか。

①ここにいう「自己正当化」とは、<導入規則は、他の論理法則との整合性や調和によって正当化されるのではない>という意味である。

②しかし、なぜこれが正当化になっているのだろうか。

ダメットが「正当化」を求めるとき、正当性の説得ではなくて、正当性の説明をしようとしている。

「われわれの問題は、演繹的推論を採用するよう誰かを説得することではない。われわれ自身を説得することですらない。問題は、我々の言語使用における演繹的推論の役割に、満足すべき説明をみつけてやることである。説明はしばしば演繹的推論のかたちをとり、説明されるべき当の事実の言明がその推論の結論になっている。だが説得のための議論とはちがって、説明のための議論においては、認識の向きは論理的帰結の向きと逆になっていてもかまわない。」(「演繹の正当化」(1973)『真理という謎』藤田晋吾訳、勁草書房、p. 277)

「説明において特徴的なことは、その議論の結論が前もって与えられているということである。だからわれわれは、その議論の前提が結論の真理性にたいして一番もっともらしい説明を与える、というだけの理由で、その前提を信じてよいであろう。したがって、循環論ないし論点先取という非難は、説得のための議論に向けられた場合とは違って、説明のための議論には当てはまらないことになる。」

(同所)

有効な説得であるためには循環論や論点先取は避けなければならないが、それは説明の有効性をさまたげないということであろうか。

「演繹的推論のプロセスに正当化をもとめる哲学者は、その正当性を説得してくれることを求めているのではなく、その正当性の説明を求めているのである。」(同所)

「演繹的推論が正当化可能であるというとき、そのことが正確に何を意味しているのか、あらかじめ明らかでない。我々はその命題の解明と、何がその命題を真ならしめるかを示す説明的議論とを、同時に求めているのである。」(同所)

論理法則の正当性の説明として、導入規則の自己正当化の説明が有効であるのかどうか、証明論的正当化が有効であるのかどうか、これだけではまだよくわからない。従来のやり方とどこが違うのだろうか。

## 2、真理表による論理定項の意味の定義と、どこが違うのか。

従前の理解では、論理学（一階述語論理）は、公理系で考えられている。公理と推論規則は規約によって設定される、公理と推論規則から定理が導出される（構文論）。真理表による論理定項の意味の定義にもとづいて、すべての式の真理値は真理表によって与えることができる。

すべての定理が、真なる式である。（健全性定理）

すべての真なる式は、定理として導出される。（完全性定理）

自然推論系（一階述語論理）について、これと類比的に説明することもできる。これは公理0個、推論規則が多数の公理系であり、これによって導出される式を定理ということができる（構文論）。意味論は従来と同じように考える。すると公理系と同じように、健全性と完全性を証明できる。

しかし、ダメットは、二値真理表は二値原理を前提しているので、「合法的説明形式たりえない」（「演繹の正当化」p. 274）と考える。（ただし、直観主義論理の意味論を（二値真理表以外の）真理表で説明する提案もある。）

ダメットは、構文論と意味論が一致しない場合には、構文論よりも意味論が優位性をもつと考える（前掲論文、p.268）。これに対して通常は、構文論に優位性が与えられるか、あるいは両者が対等で独立したものと考えられるかであり、健全性定理と完全性定理による正当性の説明もまた「テクニカル」な説明（規約がよくできていることの説明）と考えられている。それに対して、ダメットは、意味論を重視し、意味にもとづいて論理法則の正当性を説明しようとする。ダメットは、数学的真理や論理的真理の实在論者ではないのだが、強い構成主義でもない。

「演繹的推論の正当化可能性——それを妥当であるとともに有用なものとして示さんとする可能性——が、真理とその認識との間に何らかのギャップを要求するということである。すなわち、その可能性は、我々がある言明を真と認識していないとは言え、それを真と認識することを我々に可能ならしめる事情があるときには、その言明が真であるかもしれないことを容認し、そのことによって、われわれがいかに短くともある道のりを实在論への道に沿って旅すること、を要求するのである。」（論文「演繹の正当化」『真理という謎』藤田晋吾訳、p. 307）

<真理と認識の間のギャップ>とは、おそらく、証明された命題だけを理解しているとみなすのではなく、実効的な証明方法を知っている命題（証明可能な命題）の意味も理解している、とみなすことに対応している。真理は、認識を超越している、証明可能な命題pについては、pが真か、 $\sim p$ が真かを知らなくても、「 $p \vee \sim p$ 」が真であると考え、「 $p \vee \sim p$ 」の真理性は、認識を超越している。しかし認識可能性を超越しているのではない。（ダメットはおそらくこのように考えている。）

## 3、妥当な論証と定理の関係

妥当な論証とは、AからBが論理的に正しく演繹できるということである（ $A \vdash B$ と表示する）。演繹定理（ $A \vdash B$  ならば、 $\vdash A \rightarrow B$ ）を用いると、これは式 $A \rightarrow B$ が定理であるということになる。また演繹定理の逆である「 $\vdash A \rightarrow B$ ならば、 $A \vdash B$ 」もなりたつ。妥当な論証はある定理に書き換え可能である。したがって、論証の妥当性は、その論証を対応する定理に書き換えられることによって、証明できることになる。

証明論的正当化がやろうとしていることは、論証の妥当性の説明であるが、無前提の論証は定理に他な

らないので、定理の妥当性の説明を含むことになる。

#### 4、否定の扱いについて

Dummett は、導入規則として、 $\&$ と  $\vee$  と  $\rightarrow$ と  $\exists$ と  $\forall$ の導入規則を考えており、「すくなくとも否定以外の論理定項」(“The Logical Basis of Metaphysics” p.257)については基礎的想定が成り立つと考えている。したがって「一階肯定論理(否定のない直観主義論理)のすべての妥当な法則」(all valid laws of first-order positive logic (the negation-free fragment of intuitionistic logic) (ibid. p. 265)の正当化ができると考えている。つまり、ダメットがとりあえず考えているのは、論理学の中の狭い範囲に限られる弱い正当化である。

Prawitz は、それをもう少し拡張しようとしている。彼は、否定記号の代わりに、矛盾記号  $\perp$  をもちいて、 $\sim B$  を  $B \rightarrow \perp$  と表記することによって、否定をあつかえるようになると考えている (Prawitz, 'Pragmatist and Verificationist Theories of Meaning' in *Language and Meaning*, p. 461)

#### 4、証明論的正当化と証明論的意味論の関係

上記の2のような問題意識からするならば、証明論的正当化の成否は、証明論的意味論の成否と独立した問題ではない。

————— 復習と補足の終わり

### B、証明論的意味論によるテーゼ a の証明 (先週の続き)

Prawitz の主張「ある文の主張が保証されるためには、ひとは、その文の正規的証明か、それを発見する方法か、どちらかを知らなければならない」を次のテーゼにまとめた。

#### 証明論的意味論のテーゼ

「文を理解するには、その文の正規的証明を知らねばならない。あるいは、文を理解するには、その文の正規的証明を発見する方法を知らねばならない。」

この文の前半から、テーゼ a 1 が帰結する。

テーゼ a 1 「すべての数学的ないし論理的言明は、何らかの推論の結論としてのみ意味を持ちうる」

ここでとりあえず、文と言明の違いを無視するなら、二つのテーゼが食い違うのは、証明論的意味論テーゼの後半である。前に見たように、前半部分だけでは不十分であり、後半部分も必要であった。後半部分は、テーゼ a 1 と矛盾するのだろうか。それとも両立可能なのだろうか。

(1) まず、「正規的証明を発見する方法を知っている」とは、どういうことかを説明しよう。

たとえば、ダメットは、「ある自然数  $n$  は素数である」の真偽を知らなくても、その意味を理解できると、考える。その理由は、 $n$  が素数であるかどうかを決定するための実効的な(実行可能な)方法を知っているからである、という。(参照、ダメット『真理という謎』邦訳 p. 153、『思想と实在』邦訳 p. 111)

私は、いま「4 5 6 7 が素数である」の証明を知らないし、「4 5 6 7 は素数でない」の証明を知らない、しかし、どちらが真であるかを確かめる方法は知っている。それは2で割れるかどうか、割れなければ3で割れるかどうか、・・・というように繰り返してゆくことである。その作業は有限のステップで完了する。その作業が完了した時、私は、上のどちらかの証明を知っている。このようなケースが、「証明を発見する方法を知っている」でダメットが考えていることであろう。

ここでは「正規的証明」であるので、それを発見するための実行可能な方法が必要になるが、Prawitz はそれを示すこと、あるいは少なくともそれを習得することが可能だと考えているのである。

## (2) 証明論的意味論のテーゼとテーゼ a 1 の矛盾の解決方法

この二つは矛盾するので、一方を変えるか、両方を変えるかしかない。

### (ア) まず証明論的意味論を変更する可能性を考えてみよう。

数学ないし論理学の文の意味の理解について、次のような4つの見解を区別することができる。

- ①証明されることによって、「4 5 6 7は素数である」の意味がはじめて理解されると考える。
- ②証明方法を知ることによって、「4 5 6 7は素数である」の意味を理解しており、証明してもその意味は変化しない、と考える。(証明論的意味論、ダメット、プラウウィッツ)
- ③証明方法を知らなくても、「4 5 6 7は素数である」の意味は理解できており、証明してもその意味は変化しないと考える。(実在論者)
- ④仮に証明方法を知らなくても「4 5 6 7は素数である」(あるいは、ゴールドバッハの予想「すべての偶数は二つの素数の和である」)の意味はある程度理解できているが、しかし証明方法を知ることによってその意味は変化しより明確になる。そして、証明することによって、その意味は変化しさらに明確になる。(ダメットの理解するウィトゲンシュタイン?)

テーゼ a 1 と両立しそうなのは、①ないし④である。①の見解は、強すぎるように思われる。④の見解は、ありうるが、ダメットも指摘するように、意味の全体論が帰結し、「言明の意味は、言明の全体の中で確定する」ということになり、推論主義やCTと両立しない。

我々は、どうやらテーゼ a 1 を修正すべきであるようだ。

### (イ) テーゼ a 1 の修正案

テーゼ a 2 「証明された数学的ないし論理的言明は、何らかの推論の結論としてのみ意味を持ちうる」もしテーゼ a 1 を a 2 のように変更すると、CTの証明のためには、テーゼ c を付け加える必要がある。

テーゼ b 「すべての推論の結論は、問いに対する答えとしてのみ成立する」

テーゼ c 「証明されていない数学的ないし論理的言明もまた、それが答えとなる質問への関係においてのみ意味を持つ。」

テーゼ b をここで考えよう。

テーゼ b 「すべての推論の結論は、問いに対する答えとしてのみ成立する」

これの証明の一つは、次のとおりである。

推論の前提から論理的に帰結しうる命題は多数ある。その中から一つの命題が結論として選ばれるのは、その推論によって、我々が問の答えを求めているからである。

たとえば、

$$\frac{A \quad B}{A \& B}$$

という&の導入規則の場合、A と B の前提から帰結しうる文は、A、B、 $A \vee B$ 、 $A \vee C$ 、など無数にある。

したがって、A と B が与えられた時に&の導入規則を適用するのは、それがA&Bを求めているからである。そしてなぜA&Bを求めるのかといえば、それが問いに対する答えとなりうるからであり、A、B、A ∨ B、A ∨ C、などは、そこでの問の答えにはなりえないからである。

### ①文Aの証明を知っている場合

証明論的意味論の場合、もし文Aの証明を知っているのならば、その証明が問いによって可能になった推論である可能性がある。

②ところで、結論が先に与えられて、その証明をもとめること、つまり前提から結論を求めるのではなくて、結論からその前提が求めらることによって証明が得られる場合もあるだろう。

この時には、「A&Bは真であるか（正当化可能か、証明可能か）」という問いに答えようとして、これを結論とする前提を求めているのである。これによって、見出された前提から、A&Bが帰結するのは、「A&Bは真であるか（正当化可能か、証明可能か）」という問いの答えを求めているからである。

しかし、この問の答えは、「A&Bは真である（正当化可能である、証明可能である）」であって、「A&B」ではない。単文であれば、それを疑問文にすることができる。しかし、A&Bのような複合文の場合には、これを疑問文にする方法は、「A&Bは真であるか（正当化可能か、証明可能か）」という問いにするしかない。（これもまた、「真」という述語が必要になるケースの一つである。「真」という述語は、疑問文をつくるときに、大変便利な表現である。）したがって、この答えは、「A&B」と同義である。

③もし文Aの証明を知らないが、証明の発見方法を知っている、という場合にはどうなるだろうか。

「文Aの正規的証明を発見する方法を知っている」とは、「文Aの正規的証明を発見する方法は何か」という問いに答えられるということである。その答えが、「文Aの正規的証明を発見する方法は、wである」だとしよう。たとえば、「w」は「まずw1を行い、次にw2を行い、次にw3を行うならば、Aの正規的証明を得ることができる」というような形式のものになるだろう。

「4567は素数である」の証明を知らないが、その発見方法は知っているという例で考えてみよう。「この文の証明を発見する方法は何か」という問に答えられるということである。その答えは、たとえば「4567をまず2で割り、割り切れればそれは素数ではないことが証明されたことになる。もし割り切れなければ、次に3で割り、割り切れればそれは素数ではないことが証明されたことになる。もし割り切れなければ、……。 ……(nで割った商がnより小さくなるまで繰り返す) ……もし割り切れなければ68で割り、割り切れればそれは素数ではないことが証明されたことになる。もし割り切れなければ、それは素数であることが証明されたことになる。」

この③の場合に、テーゼcが成り立つだろうか。

「Aは真であるか」と問われたときに、直ちには真ないし偽を証明できないとしよう。このとき、我々は「Aを証明する方法は何だろうか」とか「Aが偽であることを証明する方法は何だろうか」と自問うだろう。それに対して、例えば「Aを証明する方法は、wである」という答えを得たとすると、我々は次にそのwを実行するだろう。

「Aは真であるか」という問いの答えは得ていないが、この間に答える途上で、「Aの証明方法は、wである」という知が成立する。もし証明論的意味論の主張のように、「Aの証明方法はwである」を知ることによって、同時にAの意味を理解することになるのだとすると、Aの理解は、「Aは真であるか」という問い

に対する答えとして与えられるのではないが、答えを求める途上で与えられることになる。

<コメント>

ダメットの主張では、真理は、認識を超越しているが、認識可能性を超越していない。pの証明方法を知っていれば、pであること、ないし $\sim p$ であることを証明していなくても、「 $p \vee \sim p$ 」を主張できると彼は考える。このとき、pの証明方法を知っていれば、そのとき、pに関する排中律は成り立っており、どちらかに決まっている、ということ認めることになる。逆に、証明方法を知らない命題qの意味は理解しておらず、したがって、それについて排中律「 $q \vee \sim q$ 」は成り立たない。qが成り立つかどうかは、我々の認識可能性とは関係なく、決まっているとは考えない。ダメットが、命題の真理性の問題と命題の意味の問題をリンクさせる理由は、ここにある。

CTの立場では、<意味の理解と認識とのギャップ>を次のように考えたい。<命題の意味を理解すること、つまりそれがどのような問いに対する答えであるかを理解すること>は、<その命題が成立しているかどうかの認識>とは別のことである。

では、<命題の意味の理解>と<命題の認識可能性>の範囲の関係をどう考えたらよいだろうか？

ダメットは、これを同じ範囲になると考えた。